## 1 :: MOCNINY A ODMOCNINY

1) Zjednodušte následující výrazy a určete, pro které hodnoty proměnných mají smysl.

a) $\left[(-x)^{-2n} : (-x)^{-2n-1}\right]^{-2} . \left[(-x)^{2n+1} . (-x)^{-2n+1}\right]^{-3} =$

b) $\left[\dfrac{a^2-b^2}{(x-y)^n}\right]^m . \dfrac{\left[(x^2-y^2)^m\right]^n}{(a+b)^m} . \left[\dfrac{a-b}{(x+y)^n}\right]^m =$

2) Upravte výraz s proměnnými $a, c, x \in \mathbf{R}^+$.

$\left(\sqrt[12]{\dfrac{a^4x^2}{c}} : \sqrt[8]{\dfrac{a^3x^5}{c^6}}\right) : \sqrt[6]{\dfrac{c^5}{ax^3}} =$

3) Upravte výraz s proměnnou $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\left\{1-\left[x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{-1} . \left(1+x^2\right)^{-1} . \left[x^0\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$

4) Vypočítejte.

a) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{2} =$

b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}} + \dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{7}+4\right) . \left(\dfrac{21}{2\sqrt{7}} - \dfrac{12}{\sqrt{7}+1}\right) =$

5) Zjednodušte následující výrazy a určete, pro které hodnoty proměnných mají smysl.

a) $\dfrac{b^{\frac{3}{2}} + b^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{3}{2}}} + \dfrac{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$

b) $\left[2x^{-1} + (2x)^{-1} + (x+2)^{-1}\right]^{-1} . (x+2)^{-1} =$

c) $x^{-1} . \left(1-x^{-2}\right) . \left(1+x^{-3}\right)^{-1} . \left(x^{-2} - x^{-1} + 1\right) =$

6) Upravte předpisy funkcí, určete definiční obory a načrtněte grafy funkcí.

a) $f(x) = \dfrac{(-x)^3 . (-x)^5}{x^2 . (-x)^2}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt{x}}{x^{-2}}} . \dfrac{x^{-4} . \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

## 2 :: KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ .

a) $x^2 - x\sqrt{2} + x - \sqrt{2} = 0$

b) $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $20x^{-4} + 3x^{-2} - 2 = 0$

d) $\left(x^2 - 2x + 8\right)^2 : \left(x^2 - 2x\right)^2 - 4 = 0$

e) $\frac{3}{x+2} + \frac{5x}{4-x^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$

f) $\left|x^2 + 2x - 1\right| - x = 1$

2) Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

a) $\frac{\frac{x}{2} - 2}{x-1} + \frac{\frac{x}{2} + 2}{x+1} \geq 1$

b) $-2x^2 - 5x + 12 > 0$

c) $\frac{x+3}{x-1} \leq \frac{x+3}{x}$

d) $x^2 - 3\left|x+1\right| - x \leq 0$

3) Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in \mathbf{R}$.

$xy + xy^2 = 18$

$x + xy^3 = 27$

4) Rozložte kvadratické trojčleny, určete definiční obor výrazu a zjednodušte jej.

$\frac{4x^2 + 7x - 2}{12x^2 + 5x - 2}$

5) Určete všechny hodnoty $b \in \mathbf{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $2x^2 + bx + 9 = 0$ byl dvakrát větší než druhý kořen.

6) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou o 3 větší než kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x + 5 = 0$.

7) Určete koeficient lineárního členu $m \in \mathbf{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $x^2 + mx + 5 = 0$ byl o 4 větší než druhý kořen této rovnice.

8) Je dána rovnice $t\left(x^2 + 1\right) - 3 = x(x - 2t)$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $t \in \mathbf{R}$. Určete, pro které hodnoty parametru $t$ má tato rovnice
   a) dva různé kladné reálné kořeny
   b) dva různé reálné záporné kořeny
   c) dva různé reálné kořeny opačných znamének

9) Chlapec skládal kostky stavebnice tvaru krychle. Chtěl postavit velikou krychli. Zbylo mu však 75 kostek, proto hranu zvětšil o jednu kostku. Potom mu ale 16 kostek chybělo. Kolik kostek měl ve stavebnici?

## 3 :: ROVNICE A NEROVNICE S NEZNÁMOU V ABSOLUTNÍ HODNOTĚ

1) Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   a) $\left|x^2 + 2x - 1\right| - x = 1$
   b) $\left|2x - 4\right| - \left|x + 3\right| = 2 - \left|x - 5\right|$
   c) $\left|x - \sqrt{3} + 1\right| = 2 - \sqrt{3}$
   d) $x^2 - 3\left|x + 1\right| - x \leq 0$
   e) $\dfrac{\left|x + 3\right|}{x + 1} \geq 2$
   f) $\dfrac{3}{\left|x - 2\right|} \leq x$
   g) $\left|x^2 + 4x\right| - 3x - 6 = 0$
   h) $\left|x^2 + 4x\right| - 3x - 6 \leq 0$
   i) $\left|1 - x\right| > 3\left|x + 3\right|$
   j) $\left|2x + 1\right| - \left|3 - x\right| \geq x$

2) Řešte nerovnici $\left|x^2 - 2x - 3\right| \leq x + 1$ v oboru **Z**.

3) Řešte nerovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   $$\frac{3\left|x\right| - 2}{1 + \left|x\right|} \leq -1$$

4) Řešte soustavu nerovnic s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   $$\left|x - 3\right| + 2\left|x + 1\right| > 4$$
   $$\left|1 + 2x\right| - 5 \leq x$$

## 4 :: ROVNICE A NEROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

a) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5}=\sqrt{3x+2}$

b) $\sqrt{-x-\sqrt{1-x}}=1$

c) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$

d) $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-10}=2$

e) $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$

f) $\dfrac{2x}{2\sqrt{3}+\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{x}}{\frac{9}{2}}$

2) Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

a) $\sqrt{x^2-4} \le x+1$

b) $x+1 \le \sqrt{x^2+3x}$

c) $x-1 < \sqrt{x^2-4}$

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$. Využijte metodu substituce.

a) $\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2+5x-10}=\sqrt{2}$

b) $\left(2x+\sqrt{x-1}\right)\left(2x+\sqrt{x-1}-8\right)-2\left(2x+\sqrt{x-1}\right)-24=0$

c) $\sqrt{\dfrac{x+10}{x+2}}-3\sqrt{\dfrac{x+2}{x+10}}=2$

d) $\left(3-\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}\right)\left(2+\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}\right)-6=0$

4) Určete definiční obory funkcí.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{4x-6}}$

b) $g(x)=\sqrt{\log_{0,2}\dfrac{x+5}{x}}$

5) Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in \mathbf{R}$.

$x^2+\sqrt{y}=14$

$x^4-\sqrt{y}=6$

## 5 :: ROVNICE S PARAMETRY A JEJICH SOUSTAVY

1) Určete $p \in \mathbf{R}$ tak, aby řešením rovnice $2p(xp+1)-(p^2+1)x=2$ bylo kladné reálné číslo.

2) V rovnici $\frac{m}{x}+\frac{m+3}{2}=8+\frac{1}{x}$ určete hodnotu parametru $m \in \mathbf{R}$ tak, aby kořenem dané rovnice bylo číslo 2.

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $m \in \mathbf{R}$.

   a) $\frac{2m}{2+x}=\frac{m-1}{x+1-m}$

   b) $\frac{2+2m}{x+m}+\frac{x-m}{x+1}=1$

   c) $\frac{m}{x(m-1)}=2-x$

4) Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in \mathbf{R}$ a parametrem $a \in \mathbf{R}$.
   $x+(a-1)y=1$
   $(a+1)x+3y=-1$

5) Určete, pro která $t \in \mathbf{R}$ je řešením dané soustavy rovnic uspořádaná dvojice reálných čísel $[x, y]$ taková, že $x<0 \wedge y>0$.
   $x+2y=2$
   $2x-3y=t$

6) Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathbf{R}$, pro které má daná rovnice dvojnásobný kořen.
   $x^2+cx+4+\frac{3}{2}c=0$

7) Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které má rovnice jeden kořen roven nule.
   $(a+1)x^2-2(a+3)x+2a^2-7a+3=0$

8) Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathbf{R}$ tak, aby kořeny rovnice
   $x^2-(m+3)x+m-13=0$ byla
   a) dvě navzájem opačná čísla
   b) dvě navzájem převrácená čísla

9) Řešte graficky rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $k \in \mathbf{R}$.
   a) $|x-k|=2$  b) $|x-5|=k$  c) $|x+3k|=|x-k|$

10) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $p \in \mathbf{R}$.
   $\sqrt{x^2+p^2}=x-2p$

## 6 :: SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ A JEJICH POUŽITÍ

1) Je dána přímka $p$ a dva různé body $A$, $B$, které leží v jedné polorovině s hraniční přímkou $p$. Na přímce $p$ najděte bod $X$ takový, aby lomená čára $AXB$ byla co nejkratší.
2) Je dána přímka $p$, kružnice $k$ a bod $Q$. Sestrojte úsečku, jejíž jeden krajní bod leží na $k$, druhý na $p$ a bod $Q$ je středem této úsečky.
3) Jsou dány rovnoběžné přímky $a$, $b$ a bod $C$, který na nich neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $ABC$ tak, aby $A \in a,\ B \in b$.
4) Jsou dány různoběžné přímky $p$, $q$ a úsečka $MN$. Sestrojte kružnici, která má poloměr $r = |MN|$, střed $S \in p$ a vytíná na přímce $q$ tětivu $AB$, $|AB| = |MN|$.
5) Jsou dány různoběžné přímky $p$, $q$ a kružnice $k$. Sestrojte úsečku $XY$ tak, aby platilo $X \in k, Y \in p$, úsečka $XY$ je kolmá na přímku $q$ a střed úsečky $XY$ leží na přímce $q$.
6) Je dána kružnice $k$, její vnější přímka $p$ a úsečka $AB$. Sestrojte úsečku $XY$ tak, aby $X \in k,\ Y \in p,\ |XY| = |AB|$ a $XY \parallel AB$.
7) Je dána kružnice $k(O;$ 4 cm) a bod $A$. Sestrojte všechny tětivy $XY$ kružnice $k$, které mají délku 6 cm a prochází bodem $A$. Polohu bodu $A$ volte
   a) uvnitř kružnice
   b) vně kružnice
8) Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno: $a + b + c = 12$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$ .
9) Je dána úsečka $CS_1$ délky 3 cm. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pro který je úsečka $CS_1$ těžnicí $t_c$ a pro který platí:
   a) $a = 3{,}5$ cm, $b = 5$ cm
   b) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$
   c) $b = 8$ cm, $\beta = 30°$

## 7 :: PODOBNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ A JEJICH POUŽITÍ

1) Je dán čtverec *KLMN* se stranou délky 4 cm. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti se středem v bodě *L* a koeficientem:
   a) $\kappa = 0{,}5$
   b) $\kappa = 2$
   c) $\kappa = -0{,}5$
   d) $\kappa = -2$
2) Je dána kružnice *k* a bod *M* ležící uvnitř této kružnice. Sestrojte tětivu kružnice *k*, která je bodem *M* rozdělena v poměru 1 : 3.
3) Jsou dány různoběžky *a*, *b* a uvnitř jednoho jejich úhlu bod *M*. Sestrojte kružnici, která prochází bodem *M* a dotýká se přímek *a* i *b*.
4) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno:
   a) $a : b : c = 7 : 3 : 5$, $v_c = 4$ cm,
   b) $a : b = 4 : 5$, $\gamma = 60°$, $v_c = 3$ cm.
5) Jsou dány přímky *a* a *b*, jejichž průsečík leží mimo papír. Dále je dán bod *M*. Narýsujte přímku *p*, která prochází bodem *M* a nedostupným průsečíkem přímek *a* a *b*.
6) Je dán trojúhelník *ABC*, jehož vrchol *C* leží mimo papír. Narýsujte kolmici na stranu *AB*, která prochází nedostupným bodem *C*.
7) Do trojúhelníku *ABC* ($a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm) vepište čtverec *KLMN* tak, aby platilo $KL \subset AB \wedge M \in BC \wedge N \in AC$ .
8) Narýsujte společné tečny kružnic $k_1$ a $k_2$, je-li dáno: $k_1(O_1;$ 3,5 cm), $k_2(O_2;$ 1,5 cm) $|O_1O_2| = 6{,}5$ cm.
9) Je dána kružnice *k*(*O*; 4 cm) a bod *M*, $|OM| = 9$ cm. Sestrojte přímku procházející bodem *M* tak, aby kružnici *k* protínala v bodech *X* a *Y* a aby úsečky *XY* a *XM* měly stejnou délku.

## 8 :: APLIKACE PYTHAGOROVY VĚTY A EUKLIDOVÝCH VĚT

1) Je dána kružnice $k(S;\, 4\text{ cm})$ a bod $A$, $|AS| = 10$ cm. Vypočítejte vzdálenost bodu $A$ od spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu $A$ ke kružnici $k$.
2) Dvě rovnoběžné tětivy v kružnici o poloměru 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm. Určete jejich vzdálenost.
3) Je dána kružnice $k(S;\, 3\text{ cm})$ a bod $M$, $|MS| = 9$ cm. Z bodu $M$ sestrojte tečny ke kružnici $k$. Body dotyku označte $T_1$ a $T_2$. Vypočítejte
   a) délku úsečky $MT_1$
   b) délku úsečky $T_1T_2$
   c) vzdálenost bodu $S$ od úsečky $T_1T_2$
4) Ve čtverci $ABCD$ označte $S$ střed strany $AB$. Zvolte bod $L \in BD$ tak, aby platilo $|BL| : |DL| = 3:1$. Dokažte, že velikost úhlu $SLC$ je 90°.
5) Je dán obdélník $ABCD$, $|AB| : |BC| = 5:2$. Na straně $CD$ najděte bod $X$ tak, aby velikost úhlu $AXB$ byla 90°. Vypočítejte, v jakém poměru dělí bod $X$ stranu $CD$.
6) Jsou dány kružnice $k_1(O_1\,;\, 4\text{ cm})$ a $k_2(O_2\,;\, 6\text{ cm})$, $|O_1O_2| = 5$ cm. Označte $P_1$ a $P_2$ jejich průsečíky a vypočítejte délku úsečky $P_1P_2$.
7) V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $c$ je dána odvěsna $a = 4$ cm a těžnice $t_a = 6$ cm. Vypočítejte délku těžnice $t_b$.
8) Je dána kružnice $k(S;\, r)$. Kružnici $k$ opíšeme a vepíšeme čtverec. Určete poměr délek stran a poměr obsahů těchto dvou čtverců.
9) Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 11, 8 a 4. Vypočítejte vnitřní úhly tohoto trojúhelníku.

## 9 :: TRIGONOMETRIE, SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA

1) Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku *ABC*, víte-li, že $b : a = \sqrt{3} : 1$, $\beta = 2\alpha$.

2) V trojúhelníku *ABC* znáte poměr délek stran $a : b : c = 2 : 4 : 5$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku *ABC*.

3) Vypočítejte velikosti všech stran trojúhelníku *ABC*, je-li dáno:
   a) $t_a$ = 6 cm, $t_b$ = 9 cm, c = 8 cm
   b) $a$ = 10 cm, $t_a$ = 8 cm, $v_b$ = 6 cm
   c) $t_a$ = 6 cm, $t_b$ = 4 cm, $t_c$ = 8 cm

4) Určete délky všech stran, úhlopříček, výšky a velikosti všech vnitřních úhlů rovnoběžníku *ABCD*, je-li dáno: $|AB|$ =6,2 cm, $|BC|$ = 5,4 cm, $|AC|$ = 4,8 cm.

5) V trojúhelníku *ABC* znáte velikosti úhlů $\alpha$ = 45°, $\beta$ = 60°, γ = 75°. Vypočítejte, v jakém poměru jsou délky stran trojúhelníku *ABC*.

6) V trojúhelníku *ABC* je dáno $a$ = 4 cm, $b$ = 6 cm, $\gamma$ = 60°. Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC* a výšky $v_a$, $v_b$ a $v_c$.

7) Trojúhelník *ABC* má délky stran 5 cm, 6 cm a 9 cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC* a obsah trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$, kde $S_{AB}$, $S_{BC}$ a $S_{AC}$ jsou středy stran *AB*, *BC* a *AC*.

8) Dokažte, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

## 10 :: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

1) Určete definiční obory funkcí.

   a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{4x-6}}$ b) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}$

   c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x-6}}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$

2) Určete, které z funkcí jsou sudé (liché) v definičním oboru.

   a) $f(x)=\cos x$ b) $f(x)=|x|$

   c) $f(x)=\log x$ d) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$

3) Rozhodněte, které z funkcí jsou omezené shora, omezené zdola, omezené v definičním oboru.

   a) $f(x)=\cos x$ b) $f(x)=|x|$

   c) $f(x)=\sin^2 x$ d) $f(x)=x$

   e) $f(x)=-x^2$ f) $f(x)=\log x$

   g) $f(x)=x^{-1}$ h) $f(x)=2^x$

4) Určete, ve kterých podmnožinách definičního oboru jsou funkce z předchozího příkladu rostoucí a klesající.

5) Rozhodněte, zda jsou následující funkce prosté ve svém definičním oboru.

   a) $f(x)=2^x$ b) $f(x)=|x+1|$

   c) $f(x)=x^2-4$ d) $f(x)=2x+5$

6) Načrtněte graf funkce *f*, víte-li že platí:
   - $D_f = \langle -3; \infty) \setminus \{0\}$
   - *f*(-3) = -2
   - průsečíky grafu funkce s osou *x* jsou v bodech $P_1[-1;0]$, $P_2[5;0]$
   - v intervalu $\langle -3; 0)$ je funkce *f* rostoucí a není omezená shora
   - v intervalu $\langle -3; 3\rangle \setminus \{0\}$ je funkce *f* sudá
   - v intervalu $\langle 3; \infty)$ je funkce *f* rostoucí a omezená shora číslem $h = 4$

   a) Z grafu určete obor funkčních hodnot funkce *f*.
   b) Určete souřadnice průsečíku grafu funkce *f* s osou *y*.
   c) Je funkce *f* omezená zdola v definičním oboru?
   d) Určete maximum funkce *f* v definičním oboru.
   e) Určete minimum funkce *f* v definičním oboru.
   f) Je funkce *f* prostá v definičním oboru?

## 11 :: LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE, MOCNINNÁ FUNKCE

1) Načrtněte grafy funkcí. Stanovte definiční obory funkcí, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osami soustavy souřadnic.
   a) $f: y = \dfrac{x+3}{x-4}$
   b) $f: y = \dfrac{1-x}{x+3}$
   c) $f: y = \dfrac{-4x+5}{2x-2}$
   d) $f: y = \dfrac{|x|+1}{|x|-2}$
   e) $f: y = \left|\dfrac{3-x}{x-2}\right|$
   f) $f: y = \left|\dfrac{7-3x}{x-2}\right|$

2) Upravte předpis dané funkce, určete definiční obor funkce a načrtněte graf.
   $f: y = \left(\dfrac{x-5}{x+1}+1\right) : \left(1-\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

3) Načrtněte grafy funkcí. Stanovte definiční obory funkcí, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osami soustavy souřadnic.
   a) $f: y = x^{-2}$
   b) $f: y = -x^{-2}$
   c) $f: y = -x^{2}$
   d) $f: y = \left|x^{-1}\right|$
   e) $f: y = \dfrac{1-x^2}{x^2}$

4) Řešte v **R** graficky následující nerovnice.
   a) $x^6 > x^5$
   b) $x^{-2} > x^5$
   c) $-x^3 \le x^4$

5) Vysvětlete definici následujících funkcí a načrtněte jejich grafy.
   a) $f: y = \operatorname{sgn} x$
   b) $f: y = [x]$

## 12 :: KVADRATICKÁ FUNKCE, GRAFICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC A NEROVNIC

1) Načrtněte grafy funkcí.
   a) $f : y = -2x^2 + 4x + 1$
   b) $f : y = x^2 + 2.|x| - 3$
   c) $f : y = \left| x^2 + 2.|x| - 3 \right|$

2) Řešte v **R** graficky nerovnici $x^2 + 2.|x| - 3 \geq 0$.

3) Načrtněte grafy funkcí. Určete souřadnice vrcholu paraboly, tvar křivky, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osami souřadnic.
   a) $f : y = x^2 - 3x$
   b) $g : y = (x + 2)^2$
   c) $h : y = \frac{1}{2}.x^2$
   d) $k : y = -x^2 + 4$
   e) $l : y = 3x^2 - 4$
   f) $m : y = x^2 + 4x + 3$

4) Zapište rovnicí funkční předpis kvadratické funkce *f*, platí-li:
   - pro $x = 2$ nabývá funkce maxima
   - hodnota maxima je 4
   - osu *y* protíná graf funkce v bodě [0;1]

5) Zapište rovnicí funkční předpis kvadratické funkce *f*, platí-li $f(1) = -2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 4$.

6) Je dána funkce $g : y = x^2 - 2x - 3$. Určete funkční předpis kvadratické funkce $f$ tak, aby graf funkce $f$ byl souměrný s grafem funkce *g*
   a) podle osy *x*
   b) podle osy *y*
   c) podle počátku soustavy souřadnic

## 13 :: GRAFY FUNKCÍ S ABSOLUTNÍMI HODNOTAMI

Načrtněte grafy funkcí. Stanovte definiční obory funkcí, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osami soustavy souřadnic.

1) $f: y = |2x|$

2) $f: y = \left| x - \dfrac{3}{2} \right|$

3) $f: y = \left| \dfrac{x}{2} - 2 \right|$

4) $f: y = |2x+1| - x|x-4|$

5) $f: y = \left| \dfrac{x+1}{x-2} \right|$

6) $f: y = |9 - x^2| + |4 - x^2| - 5$

7) $f: y = \dfrac{x^3 - |x|^3}{2}$

8) $f: y = x^2 + 2.|x| - 3$

9) $f: y = ||x-1| - 2| - 3$

10) $f: y = x.|x-3|$

11) $f: y = |x^2 - x| - |x| - 2$

12) $f: y = 2x - 1 + |x-1| + \sqrt{(1-x)^2}$

## 14 :: EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÁ FUNKCE

1) Najděte všechny hodnoty reálného parametru $p$ tak, aby daná funkce byla:

a) klesající, $y=\left(\frac{p-1}{3p}\right)^x$ b) rostoucí, $y=\left(\frac{2p^2}{p^2+1}\right)^x$

2) Pomocí grafů exponenciálních funkcí rozhodněte, jaké musí být $a\in\mathbf{R}$, aby platilo:

a) $a^{\frac{5}{6}}>a^{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{a^2}$

3) Určete definiční obor funkce:

a) $y=\frac{1}{\log(x+7)-1}$ b) $y=\sqrt{\log_{0,2}\frac{x+5}{x}}$

c) $y=\log\left(-|x+3|+|x|+1\right)$

4) Načrtněte grafy funkcí.

a) $y=2^x-4$ b) $y=2^{x+1}-4$

c) $y=-\left(2^x-4\right)$ d) $y=2^{|x|}$

e) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ f) $y=2^{3-x}$

5) Vypočítejte.

a) $\log_2\log_2 16$ b) $3\log_2\frac{5}{3}-2\log_2\frac{10}{9}+\log_2\frac{1}{30}$

c) $\log_5\frac{1}{25}-\left(\log_{\frac{1}{3}}9\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}4^2$ d) $\log^2 2+\log 2.\log 5+\log 5-\log 1$

e) $2^{\log_2 3}+3^{\log_3 5}$

6) Načrtněte grafy funkcí.

a) $y=\log_2(x+4)$ b) $y=\log_2|x+4|-1$

c) $y=\log_{\frac{1}{2}}x+2$ d) $y=\ln x$

e) $y=-\log x$

7) Pomocí grafu logaritmické funkce najděte všechna reálná čísla $x$, pro které platí:

a) $\log_{1,5}x<\log_{1,5}5$ b) $\log_{0,7}(x+1)\le\log_{0,7}\frac{1}{3}$

## 15 :: EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

1) $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] . \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

2) $2.4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

3) $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \sqrt[6]{27^{3-3x}} . \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

4) $4\log_3(2x+1) + \log_3\sqrt{2x+1} = \frac{3}{2}\log_3^2(2x+1) - 6$

5) $\frac{\log_2 2x}{\log_2 8x} + \log_2 \frac{x}{8} = \frac{2}{\log_2 4 - \log_2 0{,}5}$

6) $\frac{\log_2 x - 2}{\log_2 \frac{x}{4}} - 2\log_2\sqrt{x} = \log_2^2 x + 1$

7) $\log_9\{3\log_2[1 + \log_3(1 - 2\log_3 x)]\} = 0{,}5$

8) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

9) $x + \log_2(8 + 2^x) = 7$

10) $1000x^2 = x^{\log x}$

11) $2^{\log x} + 3^{\log x - 1} = 2^{\log x + 1} - 3^{\log x - 2}$

12) $\frac{\log \frac{x}{10}}{\log^2 \sqrt{x}} + 1 = \log x$

13) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}$ Využijte vzorec $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

14) Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in \mathbf{R}$.

$$2.2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$$
$$10.2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$$

## 16 :: GONIOMETRICKÉ FUNKCE, GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   a) $\sqrt{2}\cos(4\pi + 2x) = -1$
   b) $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0$
   c) $\sin^4 x - \cos^4 x = -1$
   d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - 2 = 0$
   e) $3\cos x + 3 = 4\cos^3 x + 4\cos^2 x$
   f) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2 = 4$
   g) $\sin x - \sin 2x + 2\cos x - 1 = 0$
   h) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$
   i) $\cos 2x - \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$
   j) $\sin x + \cos 2x = 1$
2) Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   a) $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\sin x \geq \cos x$

3) Řešte goniometrickou nerovnici s neznámou $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.
   $\sin x \,.\, \cos x > 0$

4) Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$. Využijte vzorců pro dvojnásobný argument a vhodné substituce.
   a) $\sin 4x = \sin 2x$
   b) $\cos 4x - 3\cos 2x - 3\sin 2x = 0$
   c) $\sin\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

5) Řešte goniometrickou rovnici $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

## 17 :: VYUŽITÍ GONIOMETRICKÝCH VZORCŮ

1) Určete hodnoty sin 2*x*, cos 2*x*, tg 2*x*, sin 4*x*, cos 4*x*, víte-li že $\sin x = \frac{3}{4};\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

2) Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ má daná rovnost smysl a dokažte ji.

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} + \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{tg} x$$

3) Dokažte.

$$\cos\frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

4) Vypočítejte.

$$\frac{\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}$$

5) Dokažte.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

6) Dokažte s využitím grafů funkcí.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$

7) Vypočítejte.

a) $\sin 44°.\cos 1° + \cos 44°.\sin 1°$

b) $\cos\frac{9}{13}\pi \,.\, \cos\frac{4}{13}\pi - \sin\frac{9}{13}\pi \,.\, \sin\frac{4}{13}\pi$

## 18 :: ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ PŘÍMKY A ROVINY

1) Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky $p$, která prochází bodem $A[3; -1]$ a je
   a) rovnoběžná s přímkou $q_1$: $2x + 3y + 7 = 0$
   b) kolmá k přímce $q_2$: $x - 2y + 4 = 0$
   c) rovnoběžná s osou $x$
   d) kolmá k ose $y$

2) Přímka $p$ prochází bodem $A[3; -2]$ kolmo k ose $x$. Zapište její parametrické rovnice, obecnou rovnici, směrnicový tvar a úsekový tvar rovnice přímky.

3) Přímka $p$ prochází bodem $A[-3; -1]$ a počátkem soustavy souřadnic. Zapište její parametrické rovnice, obecnou rovnici, směrnicový tvar a úsekový tvar rovnice přímky.

4) Body $A[2; 4]$, $B[4; 2]$, $C[4; 1]$ jsou vrcholy trojúhelníku $ABC$. Napište obecné rovnice výšek $v_a$, $v_b$ a $v_c$. Vypočítejte souřadnice průsečíku dvou výšek a ověřte, že tímto bodem prochází i třetí výška.

5) Proveďte diskusi o vzájemné poloze daných přímek vzhledem k hodnotě parametru $a \in \mathbf{R}$.

$$p: \quad x = a + 3k, \quad y = 1 - 2k, \quad z = 2 + k \qquad k \in \mathbf{R}$$

$$q: \quad x = 2 - 6t, \quad y = -9 + 4t, \quad z = 7 - 2t \qquad t \in \mathbf{R}$$

6) Rozhodněte, zda dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její parametrické rovnice, obecnou rovnici, vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.
   a) $A[1; 1; 1]$, $B[5; 1; -3]$, $C[2; 0; 2]$
   b) $A[1; 2; -3]$, $B[0; 1; 2]$, $C[2; 3; -8]$

7) Napište obecnou rovnici roviny $\sigma$, víte-li, že v této rovině leží body $A[3; 4; 5]$ a $B[-2; 1; 0]$ a osa $y$ je s rovinou $\sigma$ rovnoběžná.

8) Osy $x$, $y$ a přímka $KL$ určují trojúhelník. Vypočítejte jeho obsah, je-li dáno $K[2; 9]$, $L[-4; -3]$.

9) Určete obsah trojúhelníku $ABC$, jsou-li dány body $A[4; 0; -1]$, $B[2; 4; -1]$ a $C[5; 3; 4]$.

## 19 :: POLOHOVÉ VLASTNOSTI PŘÍMEK A ROVIN ŘEŠENÉ ANALYTICKY

1) Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby roviny $\rho: x + by + z - 7 = 0$ a $\sigma: ax + 4y - z + 4 = 0$ byly
   a) rovnoběžné
   b) různoběžné
   c) navzájem kolmé

2) Určete vzájemnou polohu rovin $\rho$ a $\sigma$. Jsou-li roviny různoběžné, napište parametrické vyjádření jejich průsečnice.
   a) $\rho: 2x + 4y + z - 8 = 0$, $\sigma: 2y + z - 6 = 0$
   b) $\rho: 2x + y - 2z + 6 = 0$, $\sigma: 4x + 2y - 4z + 6 = 0$

3) Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.
   a) $\rho: x + y + z - 3 = 0$, $\sigma: 3x - 2y + z - 8 = 0$, $\tau: 4x - y + 2z + 1 = 0$
   b) $\alpha: x - y + 2z - 1 = 0$, $\beta: x + 2y - z + 2 = 0$, $\gamma: x - 2y + 3z - 2 = 0$

4) Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby přímka

$$p: \quad \begin{aligned} x &= a - t \\ y &= 1 + bt \\ z &= 2 - 2t \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

   byla s rovinou $\rho: x + 2y - z - 10 = 0$
   a) různoběžná
   b) ležela v rovině $\rho$
   c) rovnoběžná a neležela v rovině $\rho$

5) Jsou dány body $A[3; 2; -1]$, $B[1; -2; 1]$, $C[-2; 8; 3]$ a $D[3; m; -1]$. Proveďte diskusi o vzájemné poloze přímek $AB$ a $CD$ vzhledem k hodnotě parametru $m \in \mathbf{R}$.

6) Určete hodnotu parametru $m \in \mathbf{R}$ tak, aby přímky $p$ a $q$ byly různoběžné. Potom vypočítejte souřadnice jejich průsečíku.

$$p: \quad \begin{aligned} x &= 2 + k \\ y &= 3 - 2k \\ z &= 4 \qquad k \in \mathbf{R} \end{aligned} \qquad\qquad q: \quad \begin{aligned} x &= 1 - 4t \\ y &= m + t \\ z &= 1 - 3t \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

7) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $AB$, $A[-2; 0; -1]$, $B[2; 1; 4]$ a roviny $\rho$, která je dána body $K[0; 0; 3]$, $L[-2; -1; 1]$ a $M[0; 1; 4]$.

## 20 :: METRICKÉ VLASTNOSTI PŘÍMEK A ROVIN ŘEŠENÉ ANALYTICKY

1) Určete odchylku přímek $p$ a $q$ v rovině.
   a) $p$: $x = 2 + t$, $y = 5$, $t \in \mathbf{R}$, $q$: $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$
   b) $p$: $x + 2y - 1 = 0$, $q$: $2x - y + 4 = 0$

2) Vypočítejte vzdálenost bodu $A[-3;13]$ od přímky $KL$, $K[0;4]$, $L[-5;-6]$.

3) Na přímce $p$: $x + 3y - 2 = 0$ najděte bod $M$ tak, aby jeho vzdálenost od přímky $q$: $5x + 12y - 4 = 0$ byla 3.

4) Napište obecnou rovnici přímky $p$, která prochází bodem $M[4;6]$. Body $A[-6;10]$ a $B[10;-6]$ mají od přímky $p$ stejnou vzdálenost.

5) Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku $ABC$, jestliže znáte vrchol $A[-1;-2]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice $t_b$: $x + 2y - 1 = 0$ a $t_c$: $y - 4 = 0$.

6) Vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny určené přímkami $p$ a $q$.
   $p$: $x = t$, $y = 2t$, $z = 4 - t$, $t \in \mathbf{R}$ $q$: $x = 1 - k$, $y = 1 - 2k$, $z = 3 + k$, $k \in \mathbf{R}$

7) Na ose $z$ určete bod $C$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnoramenný se základnou $AB$.
   $A[3;-2;4]$, $B[0;-1;-2]$

8) Vypočítejte odchylku přímek $p$ a $q$.
   $p$: $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 7 - 2t$, $t \in \mathbf{R}$ $q$: $x = 4 - k$, $y = 5$, $z = -3 + k$, $k \in \mathbf{R}$

9) Je dán bod $A[2;-1;0]$ a přímka $p$: $x = 3 + t$, $y = 1 - t$, $z = -3$, $t \in \mathbf{R}$. Na přímce $p$ určete bod $M$ tak, aby odchylka přímek $AM$ a $p$ byla 60°.

10) Vypočítejte odchylku přímky $p$ od roviny $\rho$.
    $p$: $x = 4 - 2t$, $y = 1 - 2t$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$ $\rho$: $x + 4y + z - 1 = 0$

11) Vypočítejte odchylku průsečnice rovin $\rho$: $2x + y - z + 3 = 0$ a $\sigma$: $x + y - 5 = 0$ od osy $z$.

12) Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$ tak, aby roviny $\rho$: $ax - y + 2z - 5 = 0$ a $\sigma$: $x + y - 2z + 1 = 0$ byly
    a) navzájem kolmé
    b) navzájem rovnoběžné

13) Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin $\rho$: $2x + y - 2z - 3 = 0$ a
    $\sigma$: $2x + y - 2z - 1 = 0$.

## 21 :: ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ KUŽELOSEČEK

1) Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy y v bodě $Y[0;-4]$ a osu x protíná v bodě $X[6;0]$.

2) Napište rovnici elipsy, která má ohniska $F_1[3;1]$, $F_2[5;1]$ a hlavní vrchol $A[7;1]$.

3) Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $a_1$ a $a_2$ mají rovnice $y=\pm 2(x-3)$ a jedno ohnisko je $F_1[-2;0]$.

4) Určete charakteristické prvky paraboly $x^2 - 2x - 5y + 2 = 0$.

5) Úpravou na středový (vrcholový) tvar rovnice rozhodněte, zda je daná rovnice obecnou rovnicí kuželosečky. V kladném případě určete charakteristické prvky kuželosečky (střed, vrchol, ohniska, rovnice poloos a asymptot, excentricitu, rovnici řídící přímky) a kuželosečku načrtněte.
   a) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$
   b) $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$
   c) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$
   d) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 12x + 40 = 0$
   f) $x^2 + y^2 + 6x - y + 9 = 0$

6) Napište rovnici kružnice, která prochází body $R[-3;2]$, $S[-1;4]$ a $T[3;0]$.

7) Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s některou z os souřadnic, vrchol $V[1;-4]$ a pro kterou platí, že
   a) na ose $x$ vytíná úsečku délky 8
   b) na ose $y$ vytíná úsečku délky 6

8) Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek $p_1$: $3x - 4y + 1 = 0$ a $p_2$: $3x - 4y + 5 = 0$. Její střed leží na přímce $p_3$: $3x + 2y = 0$.

## 22 :: KUŽELOSEČKY A PŘÍMKA

1) Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky $p$: $2x - y - 4 = 0$ v bodě $P[3; 2]$ a má poloměr r = $2\sqrt{5}$.
2) Proveďte diskusi vzhledem k parametru $a \in \mathbf{R}$ o vzájemné poloze přímky $q = \{[-1+t; a-t], t \in \mathbf{R}\}$ a kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$.
3) Napište rovnice tečen, které lze sestrojit z bodu $M[0; -1]$ ke kružnici $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
4) Napište rovnice tečen ke kružnici $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$, které jsou kolmé k přímce $q$: $2x - y + 6 = 0$.
5) Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbf{R}$ má přímka $p$: $y = kx$ s elipsou $x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$ právě jeden společný bod, resp. dva společné body, resp. žádný společný bod.
6) Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište čtverec $KLMN$.
7) Napište rovnici tečny elipsy $3x^2 + y^2 = 36$ tak, aby odchylka tečny a osy $x$ byla 30°.
8) Napište rovnici tečny elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, která je kolmá k přímce $q$: $3x + 2y = 0$.
9) Rozhodněte, zda z bodu $M[-8; 0]$ lze sestrojit tečnu k parabole $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$.
10) Napište rovnice tečen paraboly $2x^2 + y - 4 = 0$, které jsou kolmé k přímce $q$: $x - 7 = 0$.
11) Určete délku tětivy, kterou vytíná parabola $y^2 = 8x$ na přímce $y = x - 2$.
12) Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu $M[0; -2]$ k parabole $x^2 - 8y = 0$.
13) Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu $M[0; 0]$ k hyperbole $x^2 - 4y^2 - 6x - 3 = 0$.

## 23 :: KOMPLEXNÍ ČÍSLA

1) Vypočítejte.
   a) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right).i\sqrt{6}-\sqrt{2}.\left(2i\sqrt{2}-3\right)+i.\left(\frac{6}{\sqrt{6}}-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)$
   b) $i^{50}$
   c) $i^{-1}$
   d) $\left(2+i\right).i+\frac{3+i}{2-i}$

2) Určete, pro která $b\in\mathbf{R}$ je komplexní číslo $z=\frac{8-6b-ib}{1-ib}$
   a) reálné
   b) imaginární
   c) ryze imaginární

3) Dokažte.
   $$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2$$

4) Určete $x,y\in\mathbf{R}$ tak, aby platilo: $\left(2+i\right)^3-\frac{1-i}{i}=x-4yi-y$.

5) Řešte rovnici s neznámou $x\in\mathbf{C}$.
   a) $x^4+16=0$
   b) $x^3-64i=0$

6) Řešte rovnici s neznámou $x\in\mathbf{C}$.
   a) $\left(7+i\right)x^2-5ix-1=0$
   b) $x^2-20=ix\left(2i-x\right)$

7) Řešte rovnice s neznámou $z\in\mathbf{C}$.
   a) $\left(z+i\right)\left(z-3i\right)=z\left(z-i\right)$
   b) $\frac{z}{1-i}+\frac{z+2}{i}=\frac{5}{2i-1}$
   c) $i-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=1-\frac{1}{z}$

## 24 :: BINOMICKÁ VĚTA

1) Vypočítejte.
   a) $\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5=$
   b) $\left(a\sqrt[3]{a}-3\right)^3=$

2) V binomickém rozvoji $\left(\frac{2x^2}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^{14}$ najděte člen, který neobsahuje $y$.

3) Určete $n\in\mathbf{R}$ tak, aby pro $(1+x)^n$ platilo:
   a) koeficient u třetího členu je stejný jako koeficient u osmého členu
   b) koeficient u třetího členu je 2,5 krát větší než koeficient u šestého členu
   c) poměr koeficientů čtvrtého a třetího členu je 8 : 3
   d) součet koeficientů druhého a třetího členu je 55
   e) koeficient u $x^3$ je čtyřikrát větší než koeficient u $x^2$
   f) koeficient u $x^2$ je o 152 větší než absolutní člen
   g) koeficienty u druhého, třetího a čtvrtého členu tvoří aritmetickou posloupnost

4) Určete $z\in\mathbf{R}$ tak, aby sedmý člen binomického rozvoje $\left(\sqrt[3]{1+z}+\sqrt[6]{1-z}\right)^9$ byl roven 63.

5) Který člen binomického rozvoje $\left(y^2+y^{-1}\right)^9$ obsahuje $y^3$?

6) Určete $n\in\mathbf{N}$ tak, aby koeficient u $y^8$ v binomickém rozvoji $\left(1+2y^2\right)^n$ byl roven 240.

7) Vypočítejte desátý člen binomického rozvoje $(2a+b)^{15}$.

8) Užitím binomické věty a Moivreovy věty odvoďte vzorec pro $\sin 3x$ a $\cos 3x$.

9) Pomocí binomické věty dokažte, že $\forall n\in\mathbf{N}$ platí:
   a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$
   b) $4^n+\binom{n}{1}.4^{n-1}+\binom{n}{2}.4^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}.1=5^n$

## 25 :: KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

1) Kolik přirozených čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, jestliže se žádná z nich neopakuje? Kolik z nich je sudých?

2) Z kolika prvků lze vytvořit 600 variací druhé třídy?

3) Kolik prvků máme, je-li počet variací druhé třídy z těchto prvků 20krát menší než počet variací čtvrté třídy z těchto prvků?

4) Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací 12krát. Kolik je původních prvků?

5) Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je původních prvků?

6) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{Z}$.
   a) $\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-2}{x-4}=4$ b) $\binom{x}{1}+\binom{x-3}{x-4}=2x-3$ c) $2\binom{x+6}{x+4}-\binom{x+4}{x+2}=4!+\binom{5}{2}x$

7) Řešte nerovnici.
   a) $\binom{x+1}{x}+2x<50$ b) $\binom{x}{2}+\binom{x+2}{2}+\binom{x+4}{2}\le 100$

8) Ve skupině je 15 dětí, každé dítě má jiné jméno. Kolika způsoby lze vybrat 5 dětí tak, aby mezi vybranými
   a) byla Alena b) nebyla Alena c) byla Alena a Jana
   d) byla alespoň jedna ze zmíněných dívek
   e) byla nejvýše jedna ze zmíněných dívek
   f) nebyla ani jedna ze zmíněných dívek

9) Určete počet všech úhlopříček v konvexním *n*-úhelníku.

10) Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla právě 2 děvčata a 4 chlapci?

11) Na oslavě si skleničkou přiťukl každý s každým právě jednou. Ozvalo se 15 cinknutí. Kolik hostů si připíjelo?

12) Určete počet anagramů slova ARABELA. V kolika z nich nestojí všechna tři písmena A vedle sebe?

13) Určete počet všech nejvýše trojciferných lichých přirozených čísel (číslice se mohou opakovat). Kolik z nich je menších než 505?

14) Určete, kolika způsoby lze čtyřem dětem rozdat 20 stejných bonbónů. Kolika způsoby můžeme bonbóny rozdat tak, aby každé dítě mělo alespoň 1 bonbón?

15) Kolika způsoby lze uspořádat 8 osob do řady tak, aby pánové Suchý a Mokrý stáli vedle sebe?

16) Ve třídní samosprávě jsou 4 děvčata a 2 chlapci. Losem budou určeni 3 zástupci třídy. Jaká je pravděpodobnost, že trojice zástupců bude složena ze 2 děvčat a 1 chlapce?

17) Házíme dvěma kostkami, bílou a černou. Určete, s jakou pravděpodobností padne součet 8.

18) Házíme dvěma kostkami, bílou a černou. Určete pravděpodobnost jevu $A \cup B$.
    jev $A$ ... na bílé kostce padne číslo o 1 menší než na černé kostce
    jev $B$ ... na černé kostce padne sudé číslo

## 26 :: ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI

1) Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, je-li dáno:
   a) $a_4 + a_5 = 4$
      $a_4 \cdot a_5 = -5$
   b) $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10$
      $a_{21} : a_1 = 2$
   c) $s_5 = 60$, $s_{10} = 170$
2) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočítanými kořeny vzniklo šest následujících členů aritmetické posloupnosti.
3) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3$, $d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby byl součet větší než 250?
4) V aritmetické posloupnosti je $a_3 = 18$. Určete podmínku pro diferenci tak, aby platilo $s_9 \leq 150$.
5) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 10$, $d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech předchozích členů.
6) Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 210, součet následujících deseti členů je 610. Určete první člen a diferenci této posloupnosti.
7) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran.
8) Jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 5$, aby platilo $s_{20} \geq 1000$?
9) Určete součet všech přirozených lichých čísel menších než 1000.
10) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{N}$.
    $4 + 6 + 8 + ... + x = 270$
11) Řešte nerovnici s neznámou $x \in \mathbf{N}$.
    $3 + 6 + 9 + 12 + ... + 3x \geq 999$
12) Určete součet všech dvojciferných přirozených čísel, která jsou dělitelná 3.

## 27 :: GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

1) Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, je-li dáno:
   a) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$
      $a_2 + a_3 - a_5 = -220$
   b) $a_2 \, . \, a_3 = 9$
      $a_2 + a_3 = 10$
   c) $a_8 - a_4 = 360$
      $a_7 - a_5 = 144$
   d) $s_6 = 9 \, . \, s_3$

2) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočítanými kořeny vzniklo šest následujících členů geometrické posloupnosti.

3) V geometrické posloupnosti je $a_1 = 36$. Určete kvocient $q$ tak, aby $s_3 \leq 252$.

4) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm$^3$.

5) Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů je $\frac{304}{27}$. Vypočítejte $a_1$, $q$ a $s_5$.

6) V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

7) Mezi čísla 16 a 81 vložte několik čísel tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a dále aby
   a) celkový součet čísel daných a vložených byl 211
   b) součet čísel vložených byl -42

8) Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na polovinu původní hodnoty?

9) Kolik peněz musí pan Brzobohatý uložit, aby měl při ročním úročení 8,5 % za 5 let na účtu 25 000 Kč? Daně z úroků jsou 15 %.

## 28 :: POSLOUPNOSTI, REKURENTNÍ URČENÍ A VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

1) Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů, odhadněte vzorec pro $n$-tý člen a dokažte jeho správnost.

   $a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

2) Rozhodněte, zda je posloupnost rostoucí, klesající, omezená.
   a) $a_n = -n^2 + 4n - 4$
   b) $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$
   c) $a_n = (-1)^n . n$

3) Posloupnost je dána vzorcem pro $n$-tý člen. Určete její rekurentní vzorec.

   $a_n = n.2^{-n}$

4) Rozhodněte, zda je posloupnost aritmetická nebo geometrická.
   a) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
   b) $a_n = \frac{n+3}{5}$
   c) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

5) Rozhodněte, zda je posloupnost zadaná rekurentně aritmetická nebo geometrická.
   a) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$
   b) $a_1 = 8,\ a_{n+1} = a_n + 4.2^n$

6) Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ jsou dané nekonečné geometrické řady konvergentní. Potom určete součet příslušné řady.
   a) $2 + 4x + 8x + 16x^3 + ...$
   b) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2x)^i$
   c) $\sum_{i=1}^{\infty} (x^2 + 7)^i$
   d) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2i}$

7) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   a) $1 + 3x + 9x^2 + ... = 10$
   b) $2 - 4x + 8x^2 - ... = 1$
   c) $1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + ... = -6 \log x$
   d) $\sum_{i=1}^{\infty} (x+2)^{2i} = \frac{1}{3}$
   e) $2 . \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2i}} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$

## 29 :: ZÁKLADY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

1) Vypočítejte limity.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{x^2-1}$

2) Vypočítejte derivace funkcí v libovolném bodě definičního oboru.

a) $y=\frac{(x^2+2)^2}{4}$ b) $y=\frac{\sin 2x+1}{\sin x+\cos x}$

c) $y=\frac{x^3-6x^2+6x-1}{x-1}$ d) $y=\ln(2x+4)$

3) Napište obecnou rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T$.

a) $f(x)=\frac{1+x^3}{x-1}$ $T[2;?]$ b) $f(x)=2\sin x$ $T[0;?]$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $T\left[\frac{1}{2};?\right]$ d) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ $T[-2;?]$

4) Je dána funkce $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Na grafu funkce $y = f(x)$ určete bod $T$ tak, aby tečna v bodě $T$

a) měla směrnici $k = 5$
b) byla rovnoběžná s osou $x$
c) byla rovnoběžná s osou $y$
d) byla kolmá k přímce $q$: $3x + y - 1 = 0$
e) byla rovnoběžná s přímkou $p$: $x - y + 10 = 0$

5) Napište rovnice tečen vedených z bodu $M[3;0]$ ke křivce $y=\frac{x-4}{x}$.

6) Určete, ve kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí a klesající. Určete lokální extrémy funkce.

a) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ b) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

c) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $f(x)=\sqrt{\frac{x-6}{4-x}}$

7) Vyšetřete průběh funkce.

a) $y=x^3+6x^2+9x$ b) $y=0{,}1x^4-0{,}4x^3$ c) $y=\frac{4x}{x^2+1}$

8) Určete stranu čtverečku, který musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového papíru o rozměrech 28 cm × 60 cm tak, aby po složení vznikla krabička maximálního objemu.

## 30 :: ZÁKLADY INTEGRÁLNÍHO POČTU

1) Vypočítejte integrály.

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) dx$

c) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$ d) $\int \frac{2x^2+x-6}{2x-3} dx$

2) Integrujte dané funkce a proveďte zkoušku.

a) $\int \cos(3x+1) dx$ b) $\int \cos 3x + 1 dx$

3) Vypočítejte integrály.

a) $\int \frac{5x^2}{1+x^3} dx$ b) $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

4) Vypočítejte integrály metodou per partes.

a) $\int \cos^2 x \, dx$ b) $\int \ln x \, dx$

c) $\int x e^x \, dx$ d) $\int x^2 e^x \, dx$

e) $\int x e^{2x} \, dx$ f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

5) Vypočítejte integrály substituční metodou.

a) $\int 2x \left(x^2+4\right)^5 \, dx$ b) $\int 2x \left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

c) $\int \cos x \left(\sin x + 7\right)^2 \, dx$ d) $\int x^2 \left(4+x^3\right)^4 \, dx$

6) Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje osa $x$ a graf dané funkce $y = f(x)$ a přímky $x = a$, $x = b$, kde $x \in \langle a;b \rangle$. Vypočítejte jeho obsah.

a) $y = \sqrt{x},\ x \in \langle 0;\ 4 \rangle$

b) $y = \sin x,\ x \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$

c) $y = \ln x,\ x \in \langle 1; e \rangle$

7) Nakreslete rovinný obrazec, který vymezuje parabola $y = 2x^2 + 2x - 4$ a osa $x$. Vypočítejte jeho obsah.

8) Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezen grafy funkcí.

a) $f(x) = x^3,\ g(x) = x$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = -2x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = x^2,\ g(x) = \frac{x^2}{4},\ h(x) = 4$

9) Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru $r$.

10) Odvoďte vzorec pro výpočet objemu válce o poloměru podstavy $r$ a výšce $v$.

11) Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele o poloměru podstavy $r$ a výšce $v$.